

Θέμα 1°

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$

(Μονάδες 6)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές ή Λανθασμένες**

(α) Αν η συνάρτηση u της ταχύτητας ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας.

(β) Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{v}$, όπου v_i η συχνότητα της μεταβλητής x_i και v το μέγεθος του δείγματος.

(γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(δ) Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i .

(ε) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , τότε

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

(Μονάδες 10)

A3. Τι ονομάζουμε συχνότητα v_i

(Μονάδες 6)

A4. Αντιστοιχίστε κάθε τύπο της συνάρτησης που είναι στη στήλη A με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου που είναι στην Στήλη B.

Στήλη A $f(x)$	Στήλη B $f'(x)$
1. $3x^2$	α) $-x^{-2}$
2. $\sqrt{x}, x > 0$	β) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $\frac{1}{x}, x \neq 0$	γ) $6x$
4. $(x^2 - x)$	δ) $-2x\eta\mu(x^2)$
5. $\eta\mu 3x$	ε) $\beta\sigma\nu nx$
6. $\sigma\nu\nu(x^2)$	στ) $2x - 1$

(Μονάδες 3)

Θέμα 2°

Οι παρατηρήσεις ενός δείγματος ομαδοποιήθηκαν σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις [.....,.....)	x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[.....,.....)	5	κ			20
[.....,.....)		λ			
[.....,.....)		12			
[.....,.....)	17		50	40	
Σύνολο	—		—		—

2A) α) Να αποδείξετε ότι $c = 4$

(Μονάδες 3)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

(Μονάδες 7)

2B) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων επί % και το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων επί τις %.

(Μονάδες 9)

2Γ) Να βρεθεί το πλήθος των παρατηρήσεων όταν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 5.

(Μονάδες 3)

2Δ) Να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων όταν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι το πολύ μέχρι 9.

(Μονάδες 3)

Θέμα 3^ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}-2, & x \in \mathbb{R}-\{0,1\} \\ \frac{1}{x}-1 & \\ \alpha^2+2\alpha+\frac{3}{4}+\beta^2, & x=1 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3Α) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(Μονάδες 5)

3Β) Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α, β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

(Μονάδες 3)

3Γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot f(x) + 2, x \in \mathbb{R}-\{0,1\}$.

(α) Να μελετηθεί η $g(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

(β) Να αποδείξετε ότι $g\left(\frac{1}{2021}\right) + g\left(\frac{1}{2022}\right) > g(2021) + g(2022)$.

(Μονάδες 2)

3Δ) Να βρεθεί η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της $g(x)$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -1$.

(Μονάδες 5)

3Ε) Να βρεθεί το σημείο $M(x_0, y_0)$ της (ε) που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το

$$A\left(0, -\frac{1}{2}\right).$$

(Μονάδες 5)

Θέμα 4^ο

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1) - f(-1+h)}{h} = -4$
- $f'(x) = 3x^2 - 2x - \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
- (ε): $\gamma = 7x - 2$

4Α) Να βρεθεί η τιμή του α .

(Μονάδες 5)

Για $\alpha = 1$

4Β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να προσδιοριστούν οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων καθώς και το είδος τους .

(Μονάδες 5)

4Γ) Αν η (ϵ) αποτελεί την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 > 0$, να βρεθεί το σημείο M .

(Μονάδες 5)

4Δ) Να βρεθεί η τετμημένη του σημείου της γραφικής παράστασης της f που έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης .

(Μονάδες 10)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΕΡΔΙΚΟΥΡΗΣ ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ

2β) 1^{η} κλάση $[3,7)$ $\kappa=10$, $\lambda=8$

3Α) $-\frac{1}{2}$

Β) $\alpha = -1, \beta = 0$

Δ) $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Ε) $M\left(-\frac{6}{5}, \frac{19}{10}\right)$

4Β) $x=1$, $x=-\frac{1}{3}$

Γ) $x=2$, $M(2,12)$

Δ) $x = \frac{1}{3}$